МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЁННОГО ТЕПЛОМАССООБМЕНА ПРИ ВЫПЕЧКЕ ЛЕПЁШЕК В ТАНДЫРЕ И ПОДОВОЙ ПЕЧИ

Зарипова Дилдора Фатхуддиновна
e-mail: gulinozfattiloyevna@gmail.com

Аннотация. В работе предложена одномерная нестационарная модель сопряжённого тепло- и влагопереноса в тестовой заготовке при выпечке узбекской лепёшки в тандыре и в подовой печи. Модель учитывает несимметричные граничные условия: контактный теплообмен с нагретой стенкой или подом, лучистый теплообмен с излучающими поверхностями и конвективный теплообмен с греющей средой. Испарение влаги и образование корки описаны энтальпийным методом с подвижной зоной испарения. Численное решение получено методом конечных разностей. Показано, что 54–55 % теплоты поступает к заготовке через контакт со стенкой, доля излучения в тандыре составляет 36 % против 28 % в подовой печи, а около 56 % подведённой теплоты расходуется на испарение влаги упёка.

Ключевые слова: выпечка хлеба, тандыр, тепломассообмен, математическая модель, лучистый теплообмен, контактный теплообмен, энергоэффективность.

Abstract. A one-dimensional transient model of coupled heat and moisture transfer in a dough piece is proposed for baking Uzbek flatbread in a tandoor and in a deck oven. The model takes into account asymmetric boundary conditions: contact heat transfer with the heated wall or sole, radiation from the emitting surfaces and convection from the heating medium. Water evaporation and crust formation are described by the enthalpy method with a moving evaporation zone. The model was solved by the finite difference method. It is shown that 54–55 % of the heat reaches the dough piece through contact with the wall, the radiative share is 36 % in the tandoor versus 28 % in the deck oven, and about 56 % of the supplied heat is spent on evaporating the baking-loss moisture.

Keywords: bread baking, tandoor, heat and mass transfer, mathematical model, radiative heat transfer, contact heat transfer, energy efficiency.

Введение

Хлеб и хлебобулочные изделия занимают ведущее место в рационе населения Республики Узбекистан, а хлебопекарное производство относится к энергоёмким отраслям пищевой промышленности. Наиболее энергоёмкой стадией технологического процесса является выпечка: именно в пекарной камере расходуется основная часть топлива или электроэнергии предприятия. Фактические удельные затраты теплоты в печах в несколько раз превышают теоретически необходимое количество, которое определяется нагревом тестовой заготовки, испарением влаги упёка и перегревом корки [1]. Поэтому снижение удельного расхода энергии на выпечку является одной из задач, поставленных в Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022–2026 годы [2] и в постановлении Президента Республики Узбекистан № ПП-4422 о повышении энергоэффективности отраслей экономики [3].

Особенностью отрасли в Узбекистане является массовое производство национальной лепёшки в тандыре. В тандыре тестовая заготовка прилепляется к нагретой глиняной стенке и

© 2026 London International Monthly Conference on Multidisciplinary Research and Innovation. All Rights Reserved.

получает теплоту одновременно тремя путями: теплопроводностью через контакт со стенкой, излучением от противоположной стенки и конвекцией горячих газов. В подовой печи схема подвода теплоты иная: контакт с подом, излучение свода и стен, а также конвекция паровоздушной среды. Соотношение этих составляющих определяет скорость прогрева мякиша, толщину и цвет корки, упёк и, в конечном счёте, удельный расход энергии.

Математические модели выпечки хлеба интенсивно развиваются: предложены модели одновременного переноса теплоты, жидкой влаги и пара [4, 5], модели с подвижной границей зоны испарения [6], обзоры и расчётные исследования процессов выпечки [7, 8]. Однако большинство работ посвящено формовому хлебу в конвективных и электрических печах, а тепломассообмен при выпечке лепёшки в тандыре с несимметричными граничными условиями изучен недостаточно.

Цель работы – разработать математическую модель сопряжённого тепломассообмена в тестовой заготовке лепёшки, количественно сравнить механизмы подвода теплоты в тандыре и подовой печи и на этой основе обосновать направления снижения энергозатрат на выпечку.

Объект исследования и математическая модель

Объектом исследования является тестовая заготовка лепёшки толщиной L = 25 мм. Поскольку диаметр заготовки (200–250 мм) значительно больше её толщины, задача рассматривается в одномерной постановке. Координата x отсчитывается от поверхности, контактирующей со стенкой тандыра (подом печи), к свободной поверхности. Модель является сопряжённой: совместно рассчитываются температурное поле стенки (пода) и поля температуры и влагосодержания в заготовке.

Перенос теплоты в заготовке описывается уравнением теплопроводности со стоком теплоты на испарение, перенос жидкой влаги – уравнением диффузии:

$$\rho_s(c_s+Xc_w)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(X)\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\rho_s r\frac{\partial X_{ev}}{\partial \tau} \quad (1)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial X}{\partial x}\right)-\frac{\partial X_{ev}}{\partial \tau} \quad (2)$$

где T – температура, °C; X – влагосодержание, кг/кг сухих веществ; ρ_s – масса сухих веществ в единице объёма, кг/м^3; c_s, c_w – удельные теплоёмкости сухих веществ и воды, Дж/(кг·К); λ – теплопроводность, Вт/(м·К); r – теплота парообразования, Дж/кг; D – коэффициент диффузии влаги, м^2/с; X_{ev} – испарённая влага.

Испарение учитывается энтальпийным условием: в элементарном объёме, где T достигает T_{ev} = 100 °C при $X > X_{min}$, избыток теплоты расходуется на испарение, и температура не превышает 100 °C до высыхания объёма. Так описываются углубление зоны испарения и рост корки. Теплопроводность линейно зависит от влагосодержания:

$$\lambda(X)=\lambda_к+\left(\lambda_м-\lambda_к\right)\frac{X}{X_0} \quad (3)$$

Температура стенки тандыра (пода) T_w описывается уравнением теплопроводности

$$\rho_w c_w\frac{\partial T_w}{\partial \tau}=\lambda_w\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \quad (4)$$

Граничные условия на поверхностях заготовки:

$$x=0:\ -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=\alpha_к\left(T_{w,s}-T\right) \quad (5)$$

$$x=L:\ -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}=\varepsilon_{пр}\sigma_0\left(T_r^4-T^4\right)+\alpha(t_c-t) \quad (6)$$

© 2026 London International Monthly Conference on Multidisciplinary Research and Innovation. All Rights Reserved.

где $\alpha_к$ – коэффициент контактного теплообмена между стенкой и тестом; $\varepsilon_{пр}$ – приведённая степень черноты; σ_0 – постоянная Стефана–Больцмана; $T_г$ – температура излучающих поверхностей; $t_с$ – температура греющей среды. Наружная поверхность стенки тандыра принята адиабатной: в период выпечки тандыр работает на аккумулированной теплоте. Нижняя поверхность пода подовой печи поддерживается при температуре нагревателей. Расчётные параметры приведены в табл. 1. Теплофизические характеристики теста, мякиша и корки приняты с учётом справочных данных [9, 10].

Таблица 1. Исходные данные для расчёта

Параметр	Тандыр	Подовая печь
Толщина заготовки L, мм	25	25
Начальная температура теста, °C	32	32
Начальное влагосодержание X_0, кг/кг с.в.	0,75	0,75
ρ_s, кг/м^3; c_s; c_w, Дж/(кг·К)	240; 1600; 4180	240; 1600; 4180
$\lambda_м$; $\lambda_к$, Вт/(м·К); D, м^2/с	0,35; 0,06; $5\cdot10^{-10}$	0,35; 0,06; $5\cdot10^{-10}$
Стенка (под): материал, толщина, мм	глина, 50	камень, 20
ρ_w, кг/м^3; c_w, Дж/(кг·К); λ_w, Вт/(м·К)	1800; 880; 0,90	2200; 900; 1,50
Начальная температура стенки (пода), °C	300	260
$\alpha_к$, Вт/(м^2·К)	250	250
$T_г$; $t_с$, °C	290; 230	260; 260
$\varepsilon_{пр}$; α, Вт/(м^2·К)	0,80; 10	0,80; 12

Методика численного решения

Система уравнений (1)–(6) решена методом контрольных объёмов по явной конечно-разностной схеме. Заготовка разбита на N = 100 объёмов (Δx = 0,25 мм), стенка тандыра – на 40, под – на 20 объёмов; шаг по времени $\Delta\tau$ = 0,02 с удовлетворяет условию устойчивости явной схемы. На каждом шаге последовательно рассчитываются поля температуры стенки и заготовки, перенос влаги и испарение по энтальпийному условию. Теплопроводность на границах объёмов вычисляется как среднее гармоническое значений соседних объёмов, что корректно описывает резкий переход от влажного мякиша к сухой корке.

За окончание выпечки принят момент, когда температура в наиболее холодной точке мякиша достигает 97 °C. Граница корки определена по влагосодержанию X = 0,30 кг/кг с.в. Тепловые потоки на поверхностях раздельно интегрировались по времени, что позволило найти вклад кондуктивной (контакт со стенкой), радиационной и конвективной составляющих в суммарную подведённую теплоту.

Сеточная сходимость проверена расчётом при N = 200 и $\Delta\tau$ = 0,005 с: время выпечки изменилось на 0,15 %, подведённая теплота – на 0,6 %, упёк – на 1,1 %. Следовательно, выбранная сетка обеспечивает достаточную для инженерных расчётов точность. Расчётная программа реализована на языке Python.

© 2026 London International Monthly Conference on Multidisciplinary Research and Innovation. All Rights Reserved.

Результаты и обсуждение

Динамика температуры при выпечке лепёшки в тандыре показана на рис. 1. Поверхность стенки в зоне контакта охлаждается с 300 до 230 °C уже за первые 30 с, а ко второй минуте устанавливается на уровне около 222 °C. Это означает, что подвод теплоты от стенки определяется её тепловой активностью ($\sqrt{\lambda\rho c} \approx 1190$ Вт·с^{0,5}/(м^2·К) для глины) и запасом аккумулированной теплоты, а не только начальной температурой стенки.

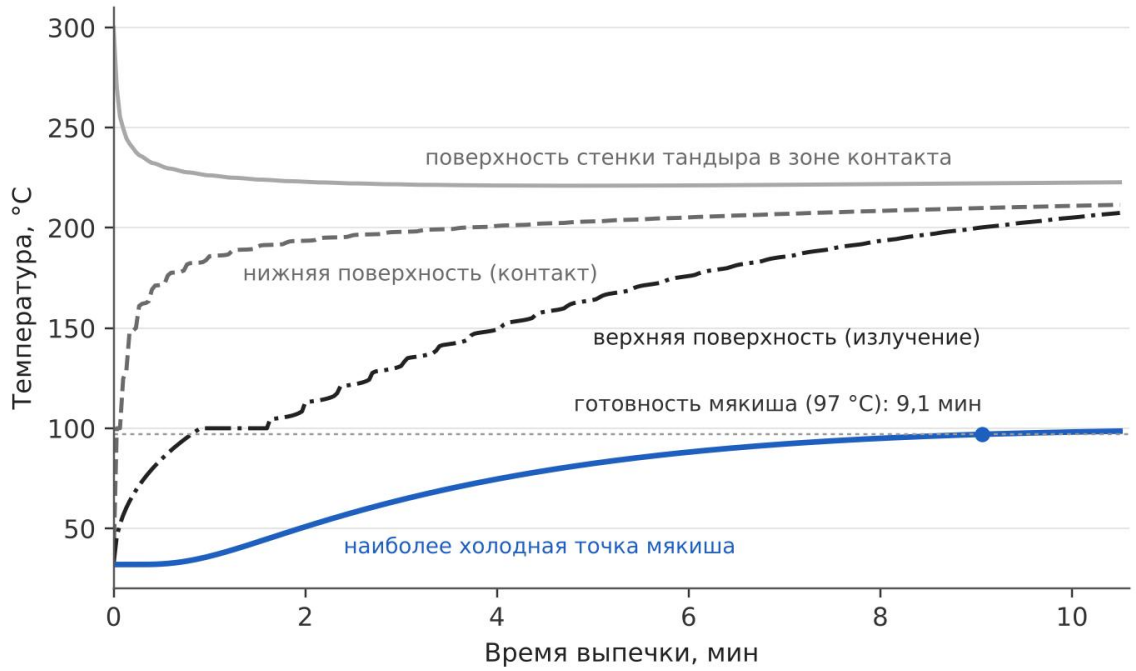


Рис. 1. Изменение температуры поверхности стенки тандыра, поверхностей заготовки и наиболее холодной точки мякиша при выпечке лепёшки в тандыре

Нижняя поверхность заготовки достигает 100 °C через 2 с после посадки, поэтому нижняя корка начинает формироваться сразу. Верхняя поверхность, нагреваемая излучением, находится на уровне 100 °C с 0,9 до 1,6 мин: в этот период вся подводимая к ней теплота расходуется на испарение. Наиболее холодная точка расположена практически в середине толщины ($x \approx 12,9$ мм) и достигает 97 °C через 9,1 мин. Сравнение тандыра и подовой печи приведено в табл. 2.

Таблица 2. Расчётные показатели выпечки лепёшки толщиной 25 мм

Показатель	**Тандыр**	**Подовая печь, 260 °C**
Продолжительность выпечки, мин	9,1	9,2
Упёк, %	11,0	10,6
Толщина нижней / верхней корки, мм	3,5 / 3,0	3,5 / 2,8
Температура нижней / верхней поверхности в конце выпечки, °C	208 / 200	209 / 188
Теплота, подведённая к заготовке, кДж/кг теста	441	432

© 2026 London International Monthly Conference on Multidisciplinary Research and Innovation. All Rights Reserved.

Показатель	Тандыр	Подовая печь, 260 °C
Доля кондуктивного подвода (контакт), %	54,3	54,8
Доля лучистого подвода, %	36,0	27,7
Доля конвективного подвода, %	9,7	17,4

В обеих печах более половины теплоты (54–55 %) поступает к заготовке через контакт со стенкой или подом. В тандыре доля излучения выше (36,0 против 27,7 %), а доля конвекции почти вдвое ниже (9,7 против 17,4 %). Поэтому для тандыра определяющими являются состояние и температура стенки, а для подовой печи – также параметры паровоздушной среды.

Из 441 кДж/кг теплоты, подведённой к заготовке в тандыре, около 249 кДж/кг (56 %) расходуется на испарение влаги упёка и около 193 кДж/кг (44 %) – на нагрев теста и корки. Каждый процент упёка соответствует примерно 22,6 кДж/кг. Следовательно, снижение упёка одновременно уменьшает теплопотребление процесса и увеличивает выход хлеба.

Продолжительность выпечки в тандыре и подовой печи практически одинакова (9,1 и 9,2 мин), несмотря на различие схем теплоподвода. Причина в том, что внутреннее термическое сопротивление мякиша ($L/\lambda_м \approx 0{,}07$ м^2·К/Вт) на порядок больше контактного ($1/\alpha_к = 0{,}004$ м^2·К/Вт). Скорость прогрева определяется теплопроводностью мякиша и толщиной заготовки, а повышение температуры греющих поверхностей мало сокращает время выпечки, но увеличивает упёк и температуру корки.

Выводы

1. Разработана одномерная сопряжённая модель тепломассообмена «стенка (под) – тестовая заготовка», учитывающая несимметричный подвод теплоты контактом, излучением и конвекцией, испарение влаги энтальпийным методом и формирование корки. Модель позволяет рассчитывать время выпечки, упёк, толщину корки и структуру теплового потока для тандыра и подовой печи.
2. При выпечке лепёшки толщиной 25 мм 54–55 % теплоты поступает через контакт со стенкой (подом). Доля излучения составляет 36,0 % в тандыре и 27,7 % в подовой печи, доля конвекции – 9,7 и 17,4 % соответственно.
3. Теплота, подведённая к заготовке, составляет 432–441 кДж/кг теста, из которых около 56 % расходуется на испарение влаги упёка. Снижение упёка на 1 % уменьшает теплопотребление продукта примерно на 22,6 кДж/кг.
4. Время выпечки лимитируется внутренним термическим сопротивлением мякиша, поэтому интенсификация за счёт повышения температуры греющих поверхностей малоэффективна. Резервы энергосбережения заключаются в выборе рационального температурного режима, снижении упёка и сокращении тепловых потерь печи.

Список литературы

1. Ауэрман Л.Я. Технология хлебопекарного производства / под общ. ред. Л.И. Пучковой. – 9-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Профессия, 2002. – 416 с.
2. Указ Президента Республики Узбекистан № УП-60 от 28.01.2022 «О Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022–2026 годы».

© 2026 London International Monthly Conference on Multidisciplinary Research and Innovation. All Rights Reserved.

3. Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-4422 от 22.08.2019 «Об ускоренных мерах по повышению энергоэффективности отраслей экономики и социальной сферы, внедрению энергосберегающих технологий и развитию возобновляемых источников энергии».
4. Thorvaldsson K., Janestad H. A model for simultaneous heat, water and vapour diffusion // Journal of Food Engineering. – 1999. – Vol. 40, No. 3. – P. 167–172.
5. Zhang J., Datta A.K. Mathematical modeling of bread baking process // Journal of Food Engineering. – 2006. – Vol. 75, No. 1. – P. 78–89.
6. Purlis E., Salvadori V.O. Bread baking as a moving boundary problem. Part 1: Mathematical modelling // Journal of Food Engineering. – 2009. – Vol. 91, No. 3. – P. 428–433.
7. Mondal A., Datta A.K. Bread baking – A review // Journal of Food Engineering. – 2008. – Vol. 86, No. 4. – P. 465–474.
8. Purlis E. Bread baking: Technological considerations based on process modelling and simulation // Journal of Food Engineering. – 2011. – Vol. 103, No. 1. – P. 92–102.
9. Гинзбург А.С., Громов М.А., Красовская Г.И. Теплофизические характеристики пищевых продуктов: справочник. – М.: Пищевая промышленность, 1980. – 288 с.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.

© 2026 London International Monthly Conference on Multidisciplinary Research and Innovation. All Rights Reserved.